

Universidad Nacional Autónoma de México.
Facultad de Ciencias.
Licenciatura en Matemáticas (y troncos comunes con ella).
Cálculo integral y diferencial I.

La cardinalidad, los números cardinales, los infinitos y los números transfinitos.

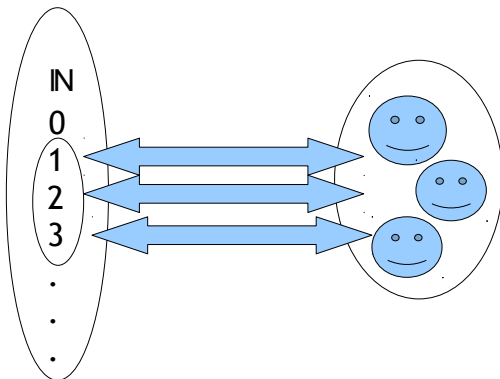
Apunte de la clase impartida por el profesor Humberto Andrés Carrillo Calvet.
Semestre 2012-1. 26 de septiembre del 2011.
Redaccion de Manuel Ignacio Castillo López.

Imaginemos que tenemos a todos los conjuntos posibles. Notaremos que algunos de ellos son finitos y otros son infinitos. Algunos finitos como el conjunto $\{0,1,2\}$ que tiene 3 elementos o bien los $\mathbb{N}$; que son infinitos.

Pero ¿qué es el infinito? ¿cómo podemos hablar de la cardinalidad de un conjunto infinito? ¿con que bases nos podemos atrever a hablar de algo que apenas conocemos o tenemos idea? Podemos empezar notando que hay más conjuntos infinitos que finitos: Cosa curiosa; en el mundo "real" (lo que sea que eso sea), observamos únicamente conjuntos finitos: n árboles, n personas, n granos de arena en la playa, n estrellas en el firmamento...

"Existen dos cosas infinitas: El universo y la estupidez humana. Y del universo no estoy tan seguro"
-Albert Einstein.

Recordemos; antes que nada, que la cardinalidad es el número de elementos de un conjunto. Para "contar" los elementos de un conjunto hacemos una biyección con los números naturales. Ésto es algo que hacemos sin darnos cuenta siempre que contamos cosas; Si vemos sillas hacemos una biyección: Hay 0 sillas si no hay ninguna, hay 1 silla si sólo hay una (valga las redundancias), hay 2 sillas si hay dos de ellas... Note que no necesariamente todos los conjuntos que queramos contar tienen el mismo numero de elementos que los naturales; ésto hace que la funcion contar sea inyectiva la mayoría de las veces, así que consideremos que al contar estamos tomando un subconjunto de $\mathbb{N}$ que tiene los elementos que necesitamos:



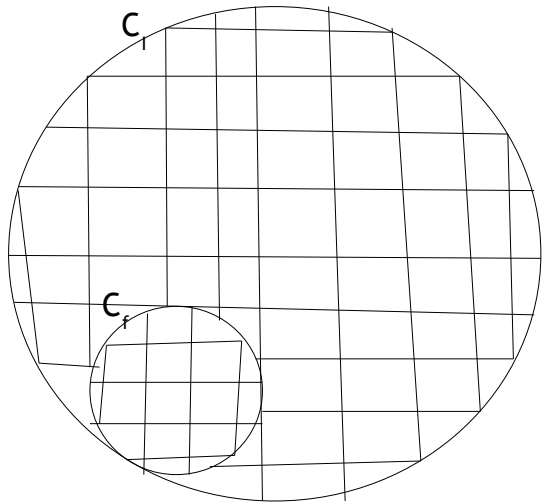
Nota:

Hay quienes consideran que el 0 no es natural.

Hay n ($n = 3$) caritas felices. Si asociamos en orden a cada carita un natural (supongamos que se ha definido el orden en $\mathbb{N}$); observamos que el mayor corresponde a 3.

Quisieramos partir "a el conjunto de todos los conjutos" en pequeños pedazos para ver como es que son los conjuntos en sí mismos (hablando de su cardinalidad). Primero

pongamos en claro que no puede haber un “conjunto de todos los conjuntos”; pues éste se contendría a sí mismo, al ser también un conjunto. Ésto provoca contradicciones y paradojas, por ello pensemos al “conjunto de todos los conjuntos” como aquel conjunto que contiene a todos los conjuntos excepto a sí mismo.



$C_f =$ Conjuntos Finitos

$C_i =$ Conjuntos Infinitos

¿Cómo será cada pedacito de ese conjunto? Primero notemos que cada subconjunto (cada “trozo”) del conjunto $C_f \cup C_i$ es una **particion**.

Definicion. Una **particion** de un conjunto A es un subconjunto propio de A; tal que la unión de todos los dicho subjconjuntos propios de A es A y la interseccion de cualesquiera dos de ellos; o más, es el vacío.

$$\text{Sea A un conjunto. } P = P_1, \dots, P_m; P_m \subset A; A \text{ es particion} \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^m P_i = A, \cap P_i = \emptyset$$

Partir (o almenos imaginar que partimos) “al conjunto de todos los conjuntos” en pequeños pedazos, nos lleva a otra incógnita: ¿Cómo podemos definir a esos pedazos para partir el conjunto? ¿Qué propiedades tienen? Partimos el “conjunto de todos los conjuntos” presisamente para estudiar como sería cada pedacito; pero notemos que incluso la idea tan sencilla anterior es “capciosa”: Pues estamos dando por hecho ya que cada pedacito tiene un conjunto o un conjunto de conjuntos que cumplen una cierta propiedad (recuerde que los elementos de un conjunto tienen ciertas caracterisitcas comunes; cumplen una propiedad: Si son reales, mayores, menores y/o iguales a, si son sillas, si son objetos tangibles... Algo tienen en común todos ellos y por esa propiedad los agrupamos y decimos son un conjunto [¿será que se podría definir “conjunto” por éste camino?])

Pero “el conjunto de los conjuntos” no se limita a contener conjuntos numéricos: Sus elementos también pueden ser cosas, objetos o quizás hasta personas. ¿Qué tendrán en común el conjunto de todos los programas para un determinado sistema operativo y el conjunto de todos los elefantes que vuelan y son rosas? En primer instancia; podríamos simplemente reír y pensar que no hay absolutamente nada en común entre ellos. Pero que tal... ¿Su número de elementos?

Todos los conjuntos tienen un número de elementos bien definido (o almenos que podremos definir bien). Así como el conjunto de todos los ateos que creen en Dios es vacío; le

corresponde el número 0 de elementos, existe el conjunto de todos los humanos que habitan el planeta Tierra; aproximadamente más de 6 mil millones (6,000'000,000). Aunque no sabemos con exactitud el número de humanos habitantes de la Tierra, es un conjunto con un número determinado de elementos, al menos en teoría si podríamos saber cuantos somos en toda la Tierra. A éste “número de elementos” le llamamos **cardinalidad**.

Definición. La **cardinalidad** del conjunto A; denotada de ambas formas $\#A$ ó $|A|$, es el número de elementos diferentes que conforman a A.

En un principio; ésto nos remite a la biyección que proponíamos al principio: A cada elemento de A le asociamos un elemento de los naturales y nos fijabamos en el mayor natural asociado: Ese es el número de elementos... ¿o no?

Reflexionemos sobre el conjunto de todos los granos de arena en una playa. Quizás sean n veces más que el número de seres humanos que habitan la Tierra; pero seguro son un número finito. El número de partículas de polvo en una calle; o hasta en todo el mundo, quizás sea todavía más grande que el número de granos de arena en una playa: Pero seguro son finitos.

¿Y que tal el número de veces que yo soy igual con migo mismo? ¿El número de vueltas que se le puede dar al planeta? ¿El número de veces que se ama a una persona en el mismo instante? Todos ellos son infinitos; y ¿será posible biyectarlo con los naturales, es más ¿Qué pasa con el número de naturales? O más “fácil” ¿Cuantos números racionales hay entre dos enteros? Más pequeño: ¿Cuantos racionales hay entre $1/9999$ y $1/99991$? La respuesta a todos ellos: Una infinidad.

Probablemente; por intuición, hemos dado por hecho toda la vida (lo que sea que eso sea) que existen números infinitos o una cosa abstracta (más abstracta que un número [¿huh?]) a la que llamamos infinito. Podemos hacer todo un estudio alrededor de éste ente; pero por ahora nos enfocaremos a un sólo aspecto que nos sirve para tratar al “conjunto de conjuntos” y sus particiones.

Ésto es: ¿será único el infinito? Tomemos un concepto intuitivo y sencillo de infinito: El infinito natural. Los números naturales los conocemos como el conjunto $\{0,1,2,3...\}$ Y esos puntos suspensivos siguen y siguen y siguen y siguen... ...y siguen...

...Pasan al 25, al $10^{999999999}$ y a muchísimos números más y sigue y sigue... ...Y nunca se detiene (o hasta donde sabemos).

¿Como “medir” al infinito? Volviendo a los conjuntos; sabemos que:

Teorema. Una funcion de A en B es inyectiva si y sólo sí la cardinalidad de A es menor o igual que la de B.

$$f : A \rightarrow B ; f \text{ iny} \Leftrightarrow |A| \leq |B|$$

Teorema. Una funcion de A en B es suprayectiva si y sólo sí la cardinalidad de A es mayor o igual que la de B.

$$f : A \rightarrow B ; f \text{ supra} \Leftrightarrow |A| \geq |B|$$

Corolario. Una función de A en B es biyectiva si y sólo si la cardinalidad de A es igual a la de B.

$$f: A \rightarrow B; f \text{ biy} \Leftrightarrow |A| = |B|$$

Usando lo anterior, podemos determinar cuando un conjunto tiene una cardinalidad mayor, menor y/o igual a otro: Si existe una función inyectiva, suprayectiva o biyectiva entre esos conjuntos.

Antes de seguir notemos la siguiente definición.

Definición. Los **números cardinales**, son aquellos que nos sirven para contar los elementos de un conjunto.

Es el subconjunto de los naturales que usamos en el dominio de una función biyectiva que llamamos "conteo"; que va a otro conjunto cualquiera A.

Los teoremas y el corolario anterior; nos dan una herramienta extra para comparar conjuntos finitos (hablando de sus cardinalidades). Pero a éstas alturas; eso es algo "trivial", así que pasemos a lo interesante: Comparar o "medir" cardinalidades infinitas.

Intuitivamente, resulta obvio pensar (y sólo pensar) que el conjunto de los números enteros tiene una cardinalidad mayor a la de los naturales. Resulta casi obvio, pues los naturales son todos los enteros positivos; algunos consideran al cero y otros no, pero sea el 0 elemento de los naturales o no, los enteros negativos no figuran en ese conjunto pero sí en los enteros. Así que ¿será la cardinalidad de $\mathbb{Z}$ es $2|\mathbb{N}|$?

Eso querría decir que no existe ninguna biyección entre esos dos conjuntos. Pero para nuestra sorpresa; se ha dado ya la siguiente función:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f_{(n)} = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \text{ donde } \lfloor x \rfloor \text{ es el } \mathbb{Z} \text{ mayor o igual a } x.$$

Es función; y es biyectiva. Según el último corolario entonces...

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$$

Antes de recurrir al hipotético suicidio de Pitágoras, el intento suicida de Einstein o la gran frustración de Galileo o de Kepler, notemos que esa función biyectiva de los naturales a los enteros no es única. Existen más de ellas. Y así como éstas existen funciones biyectivas de los naturales a los racionales... Sí; así es:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$$

...No, no son seguros los cambios de carrera...

Dejaremos al curioso lector sediento de datos; que indague en las bibliotecas (o en Google) al menos una de las muchas funciones biyectivas entre éstos conjuntos. Aquel impaciente lector, puede también buscar una función inyectiva que vaya completamente de uno de éstos conjuntos al otro y una suprayectiva que vaya completamente del otro al uno de

éstos. (Entonces a las cardinalidades no les queda más que ser iguales).

Podríamos comenzar a pensar que el infinito es único; pues la infinidad de naturales es la misma infinidad de enteros y son la misma infinidad de racionales. ¿Será que son la misma infinidad de Irracionales y de reales; respecto a la de los conjuntos anteriores? Resulta que no es así.

La cardinalidad de los irracionales es mayor que la de los números naturales/enteros/racionales. Entre ninguno de éstos se ha podido establecer una biyección con los irracionales: Sólo se ha encontrado que todos ellos tienen un cardinal menor o igual a los irracionales (pero nunca se ha demostrado la igualdad). Como los reales son la unión de los racionales con los irracionales; es fácil deducir que los reales son mayores que los irracionales. Pero no es de esa manera. De hecho, la cardinalidad de los irracionales es igual a la de los reales. Esto puede contradecir nuestro razonamiento pues si los irracionales son más grandes que los racionales (que contiene a los enteros y naturales); entonces los reales deberían ser dos veces los irracionales. Pero son iguales.

...No; tampoco estoy usando; ni usaré, una ouija, ni estudio sentado en un pentágono invertido.

*"Yo sólo quiero conocer el pensamiento de Dios; el resto, son detalles".
-Albert Einstein.*

Entonces no existe un único infinito. Tenemos el infinito de los racionales que es el mismo de los enteros e igual con los naturales, y otro infinito más grande que es el de los irracionales que es igual al de los reales. Y hay aún más grandes.

Considerando éstos infinitos como números; se les llama aleph $\aleph$, y con un subíndice se indica que infinito son: aleph cero es el cardinal de los conjuntos numerables, se supone (por ciertas disputas entre los matemáticos) que aleph uno es el cardinal de los reales; que es el mismo de los irracionales. En general es el cardinal de los conjuntos no numerables. A éstos números infinitos cardinales; se les llama **números transfinitos**.

En general hemos tratado todos los temas que buscábamos tratar en éste apunte de clase, pero aún le debemos al lector; como fue que queda la división en particiones del conjunto de todos los conjuntos en base a todo lo ya estudiado.

Teorema. Una relación es de **equivalencia** si y sólo si:

- Es reflexiva.
- Es transitiva.
- Es simétrica.

Teorema. Toda partición de un conjunto determina una relación de equivalencia.

Las particiones P_m del conjunto de todos los conjuntos entonces, determinan una relación de equivalencia. Y según la propiedad que encontramos en común a todos los conjuntos; sin importar sus elementos, ésta es su cardinalidad.

Demostración. La relación "igualdad de cardinalidad" es de equivalencia.

$$PD. R: A \rightarrow B; R = \{(A, B) | |A| = |B|\}; A \sim B$$

*PD. Res reflexiva, i.e. $A \sim A$
Es verdadero, pues: $A \sim A \rightarrow |A| = |A|$*

*PD. Res simétrica, i.e. $A \sim B \rightarrow B \sim A$
Es verdadero, pues: $A \sim B \rightarrow |A| = |B| \rightarrow |B| = |A| \rightarrow B \sim A$*

*PD. Res transitiva, i.e. $A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C$
También es cierto pues: $A \sim B \rightarrow |A| = |B| \wedge B \sim C \rightarrow |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \rightarrow A \sim C$*

Por lo tanto; R es de equivalencia.

Entonces, en los conjuntos finitos, tendremos a los conjuntos en una particion cuya cardinalidad es uno: El número de verdades absolutas, el número de veces que existe una persona en un instante, el número de conjuntos de números naturales... Otra partcion es la de los conjuntos con cardinalidad dos: El número de Estrellas en un sistema solar binario, el número de premios nobel de Madame Curie, el número de digitos en módulo binario... Y así con todas las posibles particiones dentro del conjunto de los conjuntos finitos. Notemos que la cardinalidad se convierte en una **etiqueta** de cada partición.

Y así, tendremos a las etiquetas; dadas por los números transfinitos, para los conjuntos infinitos; que dependiendo "que tan infinitos sean", tendran una etiqueta diferente: Aleph cero para los infinitos numerables, aleph uno para los no-numerables, los reales y los irracionales y así para otros conjuntos.

Así; despues de una epxlicacion que ha requerido de ciertas; pero importantes, herramientas matemáticas, logramos partir "el conjunto de todos los conjuntos" en particiones que determinaron una relacion de equivalencia dada por la igualdad del cardinal de los conjuntos; a la cual se le asocia una etiqueta correspondiente a los números naturales y otros a los números transfinitos.

¿Señan los números transfinitos una especie de conjunto de números naturales para contar infinitos?

*"El idioma en el que Dios escribió el universo, son las matemáticas".
- Galileo Galilei.*